ECON 2130

EKSAMEN 2006 VÅR - UTSATT PRØVE

SENSORVEILEDNING

Oppgaven består av 9 delspørsmål som anbefales å veie like mye, Kommentarer og tallsvar er skrevet inn mellom << ….. >>.

Oppgave 1

Knut søker opptak ved tre skoler som vi kan kalle A-skolen, B-skolen og C-skolen. La *A, B, C* betegne begivenhetene at Knut blir opptatt ved A-, B- eller C-skolen henholdsvis. Anta at sannsynlighetene for *A, B, C* er gitt ved

$$P(A) = 0,8 \qquad P(B) = 0,6 \qquad P(C) = 0,9$$

og at *A, B, C* er uavhengige begivenheter. Du vil ha bruk for å vite at dette impliserer at selv om vi bytter ut noen av de tre begivenhetene med deres komplementer, så vil uavhengigheten fortsatt gjelde. For eksempel kan vi slutte at $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ er uavhengige. Likeså $A, \overline{B}, \overline{C}$ osv. (Jfr. punkt **e.** nedenfor**.)**

a. Finn
- **(i)** sannsynligheten for at Knut blir opptatt ved alle tre skolene,
- **(ii)** sannsynligheten for at Knut ikke blir opptatt ved noen av de tre skolene.

<< (i) $P(\text{Alle}) = P(A)P(B)P(C) = 0,432$,
(ii) $P(\text{Ingen}) = (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C)) = 0,008$ >>

b. Finn sannsynligheten for at Knut blir opptatt ved A-skolen eller ved B-skolen (eventuelt begge deler). Er *A* og *B* disjunkte begivenheter? Begrunn svaret.

<< $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,92$ **>>**

c. La *X* være antall skoler Knut blir opptatt ved blant de tre skolene han søker på.
(**i**) Er det noe som taler for at X *ikke* er binomisk fordelt? Begrunn svaret.
(**ii**) Vis at $P(X = 1) = 0,116$.
(**iii**) Finn fordelingen til *X*. Det vil si, fyll ut følgende tabell:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	?	O,116	?	?

(**iv**) Beregn forventningen til X. (Hvis du ikke har klart å fylle ut tabellen under (**iii**), holder det om du gjetter på noen tall for $P(X=x)$ som grunnlag for beregningen.)

<< Forutsetningen om konstant suksess-sannsynlighet er ikke oppfylt. Ellers er alle forutsetningene for binomisk fordeling oppfylt. Av punkt **a.** følger $P(X=0)=0,008$ og $P(X=3)=0,432$. Vi har
$P(X=1)=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)=$
$0,032+0,012+0,072=0,116$, og dermed $P(X=2)=1-\sum_{j\neq 2}P(X=j)=0,444$.

Herav $E(X)=\sum_x xP(X=x)=2,3$. >>

d. (**i**) Anta vi vet at *kun en* av skolene har gitt opptak for Knut, men ikke hvilken. Hva er da sannsynligheten for at det er B-skolen som har gitt opptak for Knut?
(**ii**) Anta vi vet at *minst en* av skolene har gitt opptak for Knut, men ikke hvilke. Hva er da sannsynligheten for at B-skolen har gitt opptak for Knut?

<< (i) $P(B\mid X=1)=\dfrac{P(B\cap(X=1))}{P(X=1)}=\dfrac{P(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})}{P(X=1)}=\dfrac{0,012}{0,116}=0,103$

(ii) Siden B impliserer $(X\geq 1)$, får vi

$$P(B\mid X\geq 1)=\frac{P(B\cap(X\geq 1))}{P(X\geq 1)}=\frac{P(B)}{P(X\geq 1)}=\frac{0,6}{1-0,008}=0,605\,.$$ >>

e. La nå A og B stå for vilkårlige begivenheter. Vis at dersom A og B er uavhengige, så er også $\overline{A}$ og $\overline{B}$ uavhengige. [**Hint:** Vis, for eksempel ved et Venn-diagram, at $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$. Bruk dette til å vise at $P(\overline{A}\cap\overline{B})=(1-P(A))(1-P(B))$.]

<< $P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)=(1-P(A))(1-p(B))$ >>

Oppgave 2

La A og B stå for vilkårlige begivenheter. Vis at dersom A impliserer B (med symboler, $A\Rightarrow B$), så må $P(A)\leq P(B)$.
[**Hint:** Relasjonen $A\Rightarrow B$ kan beskrives ved et Venn-diagram der A er inneholdt i B. Bruk dette (eller på annen måte) til å begrunne at $B=A\cup(B\cap\overline{A})$. Vis så at $P(B)$ kan skrives som $P(A)$ pluss noe som ikke kan være negativt.]

<< Poenget er naturligvis at A og $B \cap \overline{A}$ er disjunkte. >>

Oppgave 3

a. Man ønsker å anslå gjennomsnittshøyden, μ, for den mannlige delen av en forhistorisk folkegruppe. Basert på skjelettfunn har man bare klart å bestemme høyden for to menn fra folkegruppen, nemlig 155 cm og 163 cm. Under forutsetning av at høyde er normalfordelt, beregn et 90% konfidensintervall for gjennomsnittshøyden for menn i folkegruppen når standardavviket, σ, anses for ukjent. Presiser eventuelt øvrige forutsetninger du måtte trenge.

<< Vi trenger en forutsetning om representativitet (at data kan anses som et rent tilfeldig utvalg fra populasjonen), samt en forutsetning om uavhengighet for å kunne anvende et t-intervall med 1 frihetsgrad.

$\overline{X} = 159$, $\quad S^2 = \frac{1}{1}((155-159)^2 + (163-159)^2) = 32, \qquad S = 5{,}6569$

Fraktil: $t_{0{,}05,\,1} = 6{,}314$

Intervall: $\overline{X} \pm t_{0{,}05,\,1} S/\sqrt{2} = 159 \pm 25{,}3 = (133{,}7,\ 184{,}3)$ >>

b. Intervallet i punkt **a**. viser at anslaget på gjennomsnittshøyden for menn er ganske usikkert. En ekspert på feltet mener imidlertid at standardavviket for høydene i populasjonen neppe kan være større enn 7 cm og kanskje mindre. Anta foreløpig at σ er kjent lik 7. Utnytt denne opplysningen til å

(i) beregne et nytt 90% konfidensintervall for μ og sammenlign med intervallet i punkt **a.**,

(ii) teste hypotesen $H_0: \ \mu \le 150$ mot alternativet $H_1: \ \mu > 150$. Bruk signifikansnivå 5% og formuler en konklusjon.

<< (i) Z-intervall: $\overline{X} \pm 1{,}645 \frac{7}{\sqrt{2}} = 159 \pm 8{,}14 = (150{,}86, \quad 167{,}14)$

(ii) Testobservator: $Z = \frac{\overline{X} - 150}{7}\sqrt{2}$. Kritisk verdi: $z_{0{,}05} = 1{,}645$.

Observert verdi: $Z = 1{,}82$. Forkast H_0. >>

c. I overensstemmelse med ekspertens uttalelse, anta nå isteden $\sigma \le 7$ (der σ for øvrig er ukjent). Vis (i) at konfidensintervallet i **b.** nå har en konfidensgrad som er større eller lik 90%, og (ii) at signifikansnivået for testen i **b.** nå er mindre eller lik 5%. [**Hint:** Utnytt resultatet i oppgave 2.]. Kan konklusjonene i punkt **b.** opprettholdes, eller bør de endres etter din mening?

<< (i) Intervallet $I_1 = (\bar{X} \pm z_{0,05} \frac{\sigma}{\sqrt{2}})$ er inneholdt i $I_2 = (\bar{X} \pm z_{0,05} \frac{7}{\sqrt{2}})$, slik at $(\mu \in I_1) \Rightarrow (\mu \in I_2)$, hvorav $P(\mu \in I_2) \geq P(\mu \in I_1) = 0,90$.

(ii) $Z_1 = \frac{\bar{X} - 150}{\sigma}\sqrt{2}$ er $\sim N(0,1)$ når $\mu = 150$, og åpenbart $(Z > z_{0,05}) \Rightarrow (Z_1 > z_{0,05})$, hvorav
$P_{150}(Z > z_{0,05}) \leq P_{150}(Z_1 > z_{0,05}) = 0,05$. Konklusjonene kan opprettholdes dersom valgt konfidensgrad og signifikansnivå er akseptable. >>